Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Relationen**
DR. ANTON MALEVICH, LEONARD BECHTEL, JULIAN MAAS

Aufgabe 1 (1) *Reflexivität, Symmetrie und Transitivität*
Überlegen Sie sich eine graphische Represäntation folgender Relationen und entscheiden Sie, ob sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv auf ihrer Grundmenge sind:

i) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ a \neq b\}$.

ii) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ a + b = 1\}$.

iii) $R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ a^2 < b^2\}$.

iv) $R_4 = \{(a,b) \in {\mathbb{N}_0}^2 |\ a - b \text{ ist gerade}\}$.

v) $R_5 = \{(a,b) \in {\mathbb{N}_0}^2 |\ a - b \text{ ist ungerade}\}$.

vi) $R_6 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (1) *Gegenbeispiel Äquivalenzrelation*
Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$$a|b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c$$

zwischen zwei ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch (und somit auch keine Äquivalenzrelation) ist.

Aufgabe 3 (3) *Äquivalenzrelation auf Funktionen*
Seien X und Y zwei beliebige Mengen und

$$f : X \longrightarrow Y$$

eine Funktion darauf. Sei außerdem auf X die Relation $\sim$ mit

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad f(a) = f(b) \qquad a, b \in X$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Sei nun auf der Menge $X/\sim$ der Äquivalenzklassen von $\sim$ die Funktion g mit

$$g([a]) = f(a) \quad a \in X$$

gegeben.

(ii) Weisen Sie nach, dass g bijektiv ist.

Aufgabe 4 (3) *Gleichheit von Äquivalenzklassen*
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und $a, b \in X$ beliebig. Beweisen Sie dann die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) $a \sim b$

(ii) $[a] = [b]$

(iii) $a \in [b]$

(iv) $b \in [a]$

(v) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$